

# Activité – Intégrales

## Activité 1 :

soient  $F_1$  et  $f$  les fonctions respectivement définies sur  $\mathbb{R}$  par :  $\begin{cases} F_1(x) = 5x^3 + 10x^2 - 5x \\ f(x) = 15x^2 + 20x - 5 \end{cases}$

1. montrer que  $F_1'(x) = f(x)$  (on dit sous cette condition que  $F_1$  est une primitive de  $f$ )
2. montrer que  $F_2$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $F_2(x) = 5x^3 + 10x^2 - 5x + 1$  est aussi une primitive de  $f$
3. que dire de  $F$  définie par  $F(x) = 5x^3 + 10x^2 - 5x + k$  où  $k \in \mathbb{R}$  est un réel quelconque ?
4. combien la fonction  $f$  admet-elle de primitives ?
5. soit  $G$  une primitive quelconque de  $f$ , on cherche à quoi ressemble nécessairement  $G$ .  
pour cela, on considère la fonction  $H$  définie par  $H(x) = G(x) - F_1(x)$ 
  - (a) montrer que  $H'(x) = 0$
  - (b) en déduire que  $H(x) = k = \text{constante}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$
  - (c) en déduire que  $G(x) = F_1(x) + k$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$
  - (d) quelle est nécessairement la forme d'une primitive de  $f$  ?
  - (e) en déduire la seule et unique primitive  $F$  de  $f$  telle que  $F(0) = 10$

## Activité 2 :

soit la fonction  $f$  telle  $f(x) = 1 + x + e^x - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$  définie sur  $\mathbb{R}^*$

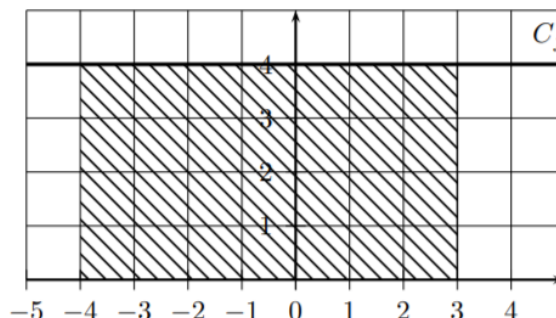
1. montrer que  $F_1$  telle que  $F_1(x) = x + \frac{x^2}{2} + e^x + \frac{1}{x} + \ln x$  est une primitive de  $f$
2. trouver une autre primitive  $F_2$  de  $f$
3. trouver la primitive  $F$  de  $f$  qui vaut 0 pour  $x = 1$

# Activité – Intégrales

## Activité 3 :

1. soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 4$

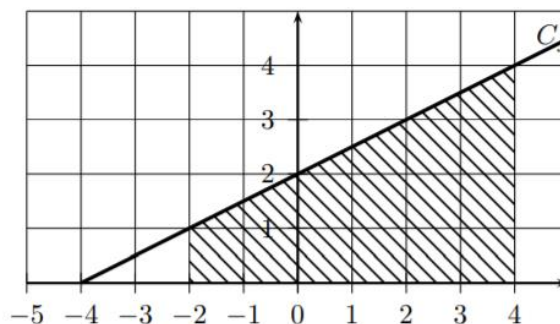
- calculer l'aire du rectangle hachuré
- donner une primitive  $F$  de  $f$
- calculer  $\int_{-4}^3 f(x)dx = F(3) - F(-4)$   
comparer les deux résultats
- un artisan fabrique 4 objets par heure.  
quel nombre d'objets aura-t-il fabriqué  
sachant qu'il a déjà travaillé 4h et  
qu'il va encore travailler 3h ?



- en déduire la valeur moyenne  $m$  de  $f$  sur  $[-4; 3]$  sachant que  $m = \frac{1}{3 - (-4)} \int_{-4}^3 f(x)dx$

2. soit  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$

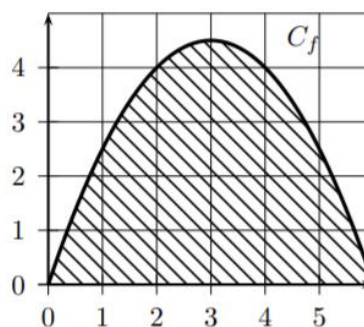
- calculer l'aire du trapèze hachuré  
(rappel : Aire =  $\frac{b+B}{2} \times h$ )
- donner une primitive  $F$  de  $f$
- calculer  $\int_{-2}^4 f(x)dx = F(4) - F(-2)$   
comparer les deux résultats



- en déduire la valeur moyenne  $m$  de  $f$  sur  $[-2; 4]$  sachant que  $m = \frac{1}{4 - (-2)} \int_{-2}^4 f(x)dx$

3. soit  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x$

- encadrer l'aire parabolique hachurée  
par deux entiers.
- donner une primitive  $F$  de  $f$
- calculer  $\int_0^6 f(x)dx = F(6) - F(0)$   
comparer les deux résultats
- en déduire la valeur moyenne  $m$  de  $f$  sur  $[0; 6]$



4. soit  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x$

soit  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = \frac{1}{2}x + 2$

- encadrer l'aire hachurée par deux entiers.
- donner  $F$  et  $G$  des primitives respectives de  $f$  et  $g$
- calculer  $\int_1^4 f(x)dx - \int_1^4 g(x)dx$  comme ci dessus.  
comparer les résultats du a. et du c.

